7. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070511:

Unter einer Diagonalen eines ebenen Vielecks mit 3 oder mehr Ecken versteht man die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Ecken des ebenen Vielecks.

Gibt es ebene konvexe Vielecke (d.h. Vielecke, bei denen jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist), bei denen

a) die Anzahl der Diagonalen halb so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?

b) die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?

Wenn es solche Vielecke gibt, dann zeichne jeweils ein Beispiel dafür!

Aufgabe 070512:

Ein Bezirk plante, die Instandsetzung dreier Straßen durchzuführen. Die erste Straße hat eine Länge von 8 km, die zweite eine Länge von 7 km, die dritte eine Länge von 6 km. Für jeden Kilometer wurden 3 000 MDN Kosten vorgesehen. Eine der drei Straßen war nur wenig beschädigt, so daß man für diese mit der Hälfte der Kosten pro Kilometer auskam, während bei jeder der beiden anderen genau die eingeplante Summe verwendet wurde. Die Gesamtkosten für die Instandsetzung betrugen 51 000 MDN.

Für welche der drei Straßen wurde nicht die eingeplante Summe verwendet?

Aufgabe 070513:

Gesucht ist die größte fünfstellige Zahl, für die folgendes gilt:

a) Die Zehnerziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Tausenderziffer.

b) Die Einer- und die Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne daß sich die fünfstellige Zahl ändert.

Aufgabe 070514:

Im Ferienlager erhält eine Zeltbelegung von ihrem Pionierleiter den Auftrag, in der Küche beim Kartoffelschälen zu helfen. Von sechs Jungen sollen drei für diese Tätigkeit ausgewählt werden.

Welches ist die Anzahl aller Möglichkeiten, verschiedene Gruppen zusammenzustellen?

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070511:
Das Dreieck hat keine Diagonalen, weil alle Punkte miteinander benachbart sind.

Das Viereck hat 2 Diagonalen und ist damit Lösung von Aufgabe a).

Das Fünfeck hat 5 Diagonalen.

Das Sechseck hat 9 Diagonalen.

Das Siebeneck hat 14 Diagonalen und ist damit Lösung von Aufgabe b).

Es ist festzustellen, daß jedes n-Eck gegenüber dem $(n-1)$-Eck $n-2$ weitere Ecken besitzt. Dies kommt daher zustande, daß der neue Punkt $n-3$ Diagonalen zu den nicht benachbarten Seiten hat und eine weitere neue Diagonale durch das Verbinden der beiden benachbarten Ecken des neuen Punktes entsteht. Damit wächst die Anzahl der Diagonalen schneller als die der Ecken, was bedeutet, daß nur das Viereck Lösung von a) ist.

Ferner gilt damit auch, daß es keine weitere Lösung für b) geben kann als das Siebeneck.

Anmerkung: Für diese Aufgabe genügt die Angabe der Lösungen ohne weitere Begründungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070512:
Wenn alle Straßen komplett instandgehalten hätten werden müssen, so hätte eine Summe von

$$(8+7+6)\text{ km}\cdot 3\,000\text{ MDN/km} = 63\,000\text{ MDN}$$

aufgewendet werden müssen. Die Differenz zur tatsächlich ausgegebenen Summe von 51 000 MDN beträgt 12 000 MDN. Dies entspricht aber genau der Hälfte des Aufwandes für eine Straße. Bei 1 500 MDN pro eingespartem Straßenkilometer entspricht dies einer Strecke von 8 km und damit dem 3. Straßenabschnitt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070513:
Jede fünfstellige natürliche Zahl läßt sich darstellen als

$$z = 10000\cdot a + 1000\cdot b + 100\cdot c + 10\cdot d + e,$$

wobei $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b..e \leq 9$ gelten muß. Damit folgt aus a) $b = 2d$ ($\Rightarrow b$ muß gerade und damit maximal 8 sein) sowie aus b) $e = c$. Damit ergibt sich für die Zahl: $z = 10000a + 1000b + 100c + 5b + c = 10000a + 1005b + 101c$. Nun wird z am größten, wenn die Summanden am größten sind. a und c können maximal 9 sowie b maximal 8 sein. Dann wäre $z = 10101 \cdot 9 + 1005 \cdot 8 = 90909 + 8040 = 98949$.

2. Lösungsweg von Karola Schmidt:

Bei Verwendung der Stellenwerttafel ergibt sich:

ZT	T	H	Z	E	Anmerkung
9	9	9	9	9	größte fünfstellige Zahl
9	8	9	4	9	größte fünfstellige Zahl, die die Bedingungen erfüllt ⇒ Lösung Die Zahl an der Tausenderstelle muss die größte einstellige gerade Zahl sein - also 8. Für die Zehnerstelle ergibt sich dann 4. Da an der Einer- und Hunderterstelle schon die größtmögliche Ziffer 9 steht, ist die Bedingung b) eigentlich überflüssig.

Aufgeschrieben und gelöst von M. Kugel und K. Schmidt

Lösung 070514:

Es sind alle Möglichkeiten anzugeben, aus 6 verschiedenen Elementen (in diesem Fall den Jungen) drei auszuwählen. Es werden die 6 Elemente mit A, B, C, D, E, F bezeichnet. Dann gibt es folgende Gruppen (Achtung: keine Gruppe darf bei dieselben Elemente enthalten, auch wenn die Reihenfolge vertauscht ist!):

ABC	BCD	CDE	DEF
ABD	BCE	CDF	
ABE	BCF	CEF	
ABF	BDE		
ACD	BDF		
ACE	BEF		
ACF			
ADE			
ADF			
AEF			

Zusammen sind dies 20 Möglichkeiten.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel