1. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1961/1962

Aufgaben

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011211:

Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 011212:

Bei der Planung unserer sozialistischen Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung. Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode:

Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:

1. Ziegelei zur 1. Baustelle 25 km,

1. Ziegelei zur 2. Baustelle 24 km,

2. Ziegelei zur 1. Baustelle 26 km,

2. Ziegelei zur 2. Baustelle 20 km.

Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind? Dabei wird angenommen, daß die Transportkosten der Entfernung proportional sind.

Aufgabe 011213:

Wieviel verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 1 und 2, b) 1, 2 und 3, c) 1, 2, 3 und 4

bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen?

Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!

d) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?

e) Was läßt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

Aufgabe 011214:

Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\sphericalangle BMA = \omega$ zu konstruieren, wobei M die Mitte der Strecke $\overline{BC}$ ist. Es sei $\omega < 90°$.

Man beweise, daß die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn $b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$ ist. In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

Aufgabe 011215:

Zur Berechnung der Länge l eines Treibriemens wird in der Praxis die Näherungsformel

$$l = \pi \frac{D+d}{2} + 2a + \frac{(D-d)^2}{4a}$$

benutzt. Dabei ist

d der Durchmesser der treibenden Scheibe,
D der Durchmesser der getriebenen Scheibe und
$\overline{M_1 M_2} = a$ der Abstand der beiden Achsen.

Für die folgenden beiden Beispiele soll die Länge des Treibriemens genau und nach der Näherungsformel berechnet werden.

Wie groß ist in den beiden Beispielen der relative Fehler (in Prozent), der bei Anwendung der Näherungsformel entsteht?

a) $d = 140$ mm, $D = 220$ mm, $a = 500$ mm,

b) $d = 60$ mm, $D = 220$ mm, $a = 200$ mm.