3. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1963/1964

Aufgaben

3. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

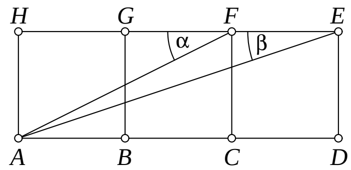
Aufgabe 031041:

Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine Brücke. Als er $\frac{3}{8}$ des Weges zurückgelegt hat, trifft er einen ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommenden Radfahrer.

Mit welcher Geschwindigkeit fuhren beide, wenn ein mit 80 km/h auf der gleichen Straße fahrendes Auto den einen am Anfang und den anderen am Ende der Brücke traf?

Aufgabe 031042:

Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck lt. Abbildung. Es ist zu beweisen, daß $\alpha + \beta = 45°$ ist!



Aufgabe 031043:

Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

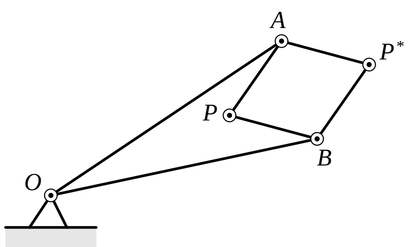
Aufgabe 031044:

Wieviel Endnullen hat das Produkt

$$p_1^1 \cdot (p_1^2 \cdot p_2^1) \cdot (p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1) \cdots (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \cdots p_{98}^3 \cdot p_{99}^2 \cdot p_{100}^1)\,?$$

Dabei sind $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{100}$ die ersten hundert Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.

Aufgabe 031045:



Der „Inversor“ von Peaucellier besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ (mit $\overline{OA} = \overline{OB}$), die in A und B mit einen Gelenkrhombus $APBP^*$ verbunden sind (vgl. Abbildung). Es sei $\overline{OA} > \overline{AP}$.

Man denke sich den Punkt O in der Ebene drehbar fixiert und zeige, daß das Produkt der Entfernungen $\overline{OP} = r$ und $\overline{OP}^* = r^*$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.

Aufgabe 031046:

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.