4. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1964/1965

Aufgaben

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041221:
Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, daß aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen.

Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen. Unterscheiden Sie die folgenden Fälle!

a) Es entstehen regelmäßige Vierecke.

b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.

b) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

Aufgabe 041222:
Es ist zu beweisen, daß alle Zahlen der Form

$$73^n + 1\,049 \cdot 58^n$$

- wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist - durch 1965 teilbar sind.

Aufgabe 041223:
Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung $a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geq 0$ richtig ist.

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 041224:
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$
$$x + y = 90°!$$

(Es soll eine Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.)

Aufgabe 041225:
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleich großen Winkeln erscheinen (d.h. $\sphericalangle BPA \cong \sphericalangle CPB \cong \sphericalangle CPA$).

Aufgabe 041226:
Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen $x^2 + y^2 < r^2$ und $\mid y - x \mid > \frac{r}{2}$ genügen ($r > 0$)!