5. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1965/1966

Aufgaben

5. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051041:

Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$.

Man zeige, daß in diesem Falle $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist!

Aufgabe 051042:

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_a + h_b = 10$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$!

   Dabei ist h_a die Länge der zur Seite $\overline{BC}$ gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite $\overline{AC}$ gehörenden Höhe, α das Maß des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β das Maß des Winkels $\sphericalangle CBA$.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 051043:

Man beweise folgenden Satz:

Die sechs Ebenen, deren jede einen Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen des (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders mit den Ecken A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, halbiert, schneiden einander in genau einem Punkt M. Dieser ist der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.

Anmerkung: Die Existenz einer einbeschriebenen Kugel soll beim Beweis nicht benutzt werden.

Aufgabe 051044:

Man berechne die Differenz D aus der Summe der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen ≤ 100 und der Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen < 100!

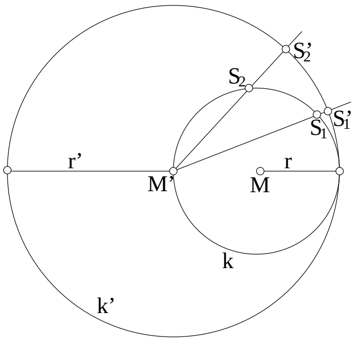
Aufgabe 051045:

Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x und y, die die Gleichung

$$[\sin(x - y) + 1] \cdot [2\cos(2x - y) + 1] = 6$$

erfüllen!

Aufgabe 051046:



Der Kreis k rolle auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, ohne zu gleiten, ab, indem er stets k' von innen berührt.

Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft!

Anleitung: Man beweise zunächst folgenden Hilfssatz!

Trifft jeder von zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehende Strahlen k ein zweites Mal, so werden durch diese Schnittpunkte k bzw. k' in zwei solche Bögen zerlegt, daß die im gleichen Winkelraum gelegenen Bögen gleich lang sind.