5. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1965/1966

Aufgaben

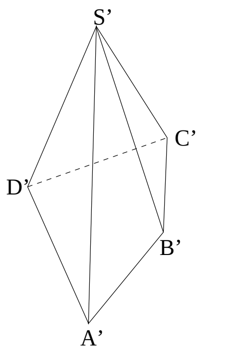
5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051231:

Es ist zu beweisen, daß die Zahl $z = 2^n + 1$ für keine natürliche Zahl $n \geq 0$ Kubikzahl ist.

Aufgabe 051232:



Die in der Abb. im Grundriß gegebene vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, daß die Schnittfläche ein Parallelogramm ist.

a) Konstruieren Sie an dem gegebenen Grundriß die geforderte Schnittfläche und die Spurgerade der zugehörigen Schnittebene!

b) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Trapez ist?

c) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist?

Aufgabe 051233:

a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

(a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt.

b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$.

Aufgabe 051234:

Die Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ seien wie folgt definiert:

$$x_0 = 1,$$
$$y_0 = 0,$$
$$x_{n+1} = x_n + 2y_n,$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

für $n \geq 0$.

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n \text{ gilt.}$$

Aufgabe 051235:

Der Flächeninhalt des ebenen (nicht notwendig konvexen) Vierecks $ABCD$ sei S, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d.

Man beweise, daß stets gilt

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2},$$

und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 051236:

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

(1) $\sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ für alle reellen x mit $\sin x \neq 0$.

(2) $\sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = 0$ für alle reellen x mit $\sin x = 0$.