6. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1966/1967

Aufgaben

6. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061041:

Man beweise:

Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl $m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$ durch 30 teilbar.

Aufgabe 061042:

Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ε und ε_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I_{\Delta ABC}$ eines Dreiecks ΔABC, das in der Ebene ε liegt. Die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$.

Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_{1\Delta A_1B_1C_1}$?

Aufgabe 061043:

In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt:

> Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ΔABC; gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck ΔPQR so, daß P innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$, Q innerer Punkt der Strecke $\overline{CA}$ und R innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.

Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:

> Anita glaubt, daß die Aufgabe nicht für jedes Dreieck ΔABC lösbar ist.
>
> Berthold ist der Meinung, daß es für jedes Dreieck ΔABC genau eine Lösung gibt.
>
> Claus nimmt an, für jedes Dreieck ΔABC gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke ΔPQR, die Lösung sind, sind einander kongruent.
>
> Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck ΔABC gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck ΔABC mit der Eigenschaft, daß nicht alle Dreiecke ΔPQR, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind.

Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

Aufgabe 061044:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC; wie üblich sei $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\sphericalangle ACB$.

Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos\gamma|$ beträgt!

Aufgabe 061045:

Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl.

Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x} \text{ genügen!}$$

Aufgabe 061046:

Geben Sie die Gesamtanzahl aller verschiedenen ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Ungleichung

$$|x| + |y| \leq 100 \text{ an!}$$

Dabei gelten zwei Lösungspaare (x_1,y_1), (x_2,y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.