6. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1966/1967

Aufgaben

6. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061241:

In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegenen Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates.

Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ε, für die das Dreieck ΔPQR gleichseitig ist!

Aufgabe 061242:

Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine Folge "F_n" genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$ existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$.

(2) Jede der Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.

(3) Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.

(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.

Bemerkung: Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ oder $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots\}$ oder $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots, x_{m_t}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$.

Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n?

b) Wenn Frage a) für ein n zu verneinen ist:

Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine Folge F_n haben kann?

Aufgabe 061243:

Man beweise folgenden Satz:

Ist $n \geqslant 2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1, \dots, s_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1} .$$

Aufgabe 061244:

Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geqslant 3$. Es sei $V = P_1P_2 \dots P_n$ ein ebenes regelmäßiges n-Eck.

Geben Sie die Gesamtanzahl aller voneinander verschiedenen stumpfwinkligen Dreiecke $\Delta P_kP_lP_m$ (wobei P_k, P_l, P_M Ecken von V sind) an!

Aufgabe 061245:

Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5x + 2y + z = 10n$!

Aufgabe 061246:

Man beweise folgenden Satz:

Liegen die n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_i, $i = 1, 2, \dots, n,$; $n \geqslant 2$, so im dreidimensionalen Raum, daß jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.