7. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1967/1968

Aufgaben

7. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071041:

Welchen Rest läßt eine natürliche Zahl a bei der Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind!

Aufgabe 071042:

Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, daß er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.

Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h < \frac{a}{2}$, $h = \frac{a}{2}$ und $h > \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

Aufgabe 071043:

Beweisen Sie folgende Behauptung!

Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen.

Aufgabe 071044:

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel! Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

Aufgabe 071045:

Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1, W_2, W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände. W_1, W_2, W_3 liegen nicht auf derselben Geraden. Die Werkhallen sind miteinander durch drei geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken $\overline{W_1W_2}$, $\overline{W_2W_3}$ und $\overline{W_3W_1}$) verbunden. Für die Strecken gilt: $\overline{W_2W_3} < \overline{W_3W_1} < \overline{W_1W_2}$. Die Bahnstation hat von den drei Straßen gleichen Abstand. Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken $\overline{BW_1}, \overline{BW_2}$ und $\overline{BW_3}$) mit den drei Werkhallen verbunden.

Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.

Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!

Aufgabe 071046:

Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}\,.$$