8. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1968/1969

Aufgaben

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081031:

In einem Dreieck ΔABC sei $\overline{AB} = 18\text{cm}$. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so daß ein Trapez $ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreieck ΔABC ist.

Berechnen Sie die Länge der Seite $\overline{DE}$ des Trapezes!

Aufgabe 081032:

Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der beiden letzten Zahlen ist. Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?

b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:

   1) für $n = 3$!

   2) für beliebiges positives ganzes n!

Aufgabe 081033:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6\,ab$ stets

$$\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2} \lg 2 \ \text{ gilt!}$$

Aufgabe 081034:

Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0; 8)$.

Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Aufgabe 081035:

Beweisen Sie folgende Behauptung:

Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

Aufgabe 081036:

Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3$, $q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.