8. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1968/1969

Aufgaben

8. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081041:

a) Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck folgender Satz gilt!

Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.

b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F = \frac{abc}{2d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

Aufgabe 081042:

Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \text{der Ausdruck} \quad s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \quad \text{existiert!}$$

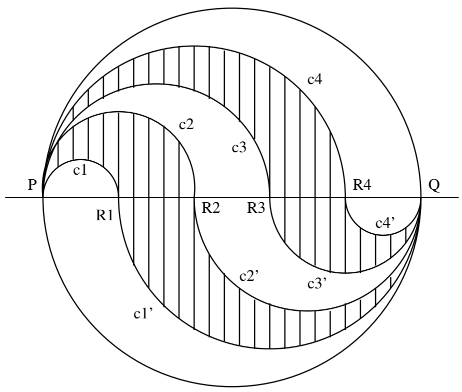
Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

Aufgabe 081043:

In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$ gegeben. Ein Durchmesser $\overline{PQ}$ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$, so daß

$$\overline{PR_1} = \overline{R_1R_2} = \cdots = \overline{R_{n-2}R_{n-1}} = \overline{R_{n-1}Q} \text{ gilt.}$$

Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$).



Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, \dots, b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis zerlegt wird!

Aufgabe 081044:

Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, daß auf ihnen durch die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.

Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, daß die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

Aufgabe 081045:

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2$ erfüllen!

Aufgabe 081046:

Die Abbildung zeigt einen Würfel

$$W = ABCDEFGH$$

mit der Kantenlänge a.

In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2F_2E_2$, $A_3D_3H_3E_3$, $B_4C_4G_4F_4$, $D_5C_5G_5H_5$, $E_6F_6G_6H_6$ einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, \dots, M_6$ gelegen, und zwar so, daß die drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$, $g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden.

Aus W werden die drei Quader $A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6$, $A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5$, $A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$ herausgeschnitten.

Für welchen Wert von x hat der entstandene Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?