8. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1968/1969

Aufgaben

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081211:

Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen im August 1966 erhielten in der Länderwertung die DDR als erfolgreichstes Land, 37 Punkte und die UdSSR 36,5 Punkte. Beide Länder erhielten in jeder der 5 Disziplinen Einer, Doppelzweier, "Vierer mit", Doppelvierer und Achter genau je eine der drei pro Disziplin vergebenen Medaillen.

Wieviel Goldmedaillen, wieviel Silbermedaillen und wieviel Bronzemedaillen erhielt jedes der beiden Länder?

Die Punktbewertung ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

	Goldmedaille	Silbermedaille	Bronzemedaille
Einer bzw. Doppelzweier	6	5	4
"Vierer mit" bzw. Doppelvierer	9	7,5	6
Achter	12	10	8

Es ist ferner bekannt, daß die DDR beim Doppelzweier besser als beim Einer und beim Doppelvierer besser als beim "Vierer mit" abschloß. Die UdSSR schnitt beim Einer besser als beim Doppelzweier ab.

Aufgabe 081212:

a) Auf den Seiten AB, BC und CA des Dreiecks ΔABC liegen die von den Eckpunkten und paarweise untereinander verschiedenen Punkte A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3, B_4 bzw. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

   Geben Sie die Anzahl aller Dreiecke an, die aus allen diesen Punkten (einschließlich der Eckpunkte A, B, C) gebildet werden können! Zwei Dreiecke gelten genau dann als gleich, wenn jede Ecke des einen Dreiecks auch Ecke des anderen ist.

b) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Dreiecke an, wenn es sich entsprechend um die Punkte A_1, ..., A_k bzw. B_1, ..., B_m bzw. C_1, ..., C_n handelt (k, m, n gegebene natürliche Zahlen)!

Aufgabe 081213:

In einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die Höhen in einem Punkt S.

Berechnen Sie die Größe α des Winkels $\sphericalangle CSD$!

Aufgabe 081214:

Quadratwurzeln berechnet man häufig mit der folgenden Näherungsformel:

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

a) Es ist zu beweisen, daß für den Fehler $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2 + b}$ dieses Näherungswertes stets $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$ gilt.

b) Stellen Sie eine analoge Näherungsformel für $\sqrt[3]{a^3 + b}$ auf, und geben Sie eine Abschätzung für den Fehler!

Bei der praktischen Anwendung wird b relativ klein gewählt. Wie läßt sich die Abschätzung vereinfachen, wenn man etwa a, b ganzzahlig voraussetzt, und zwar so, daß $a^3 + b$ zwischen den Kubikzahlen a^3 und $(a + 1)^3$ liegt?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Formeln Näherungswerte für $\sqrt{56}$ und $\sqrt[3]{80}$!