9. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1969/1970

Aufgaben

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091041:

Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, daß jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

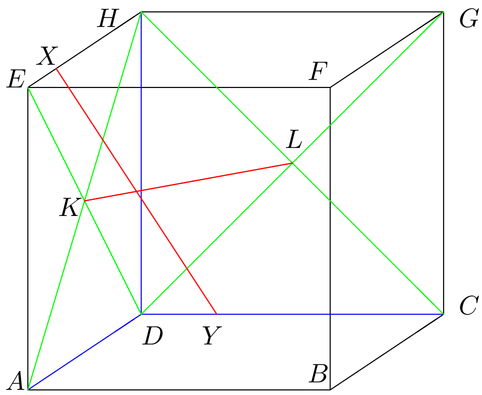
Aufgabe 091042:

Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq 1, b \neq 1$ ermittle man alle Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

Aufgabe 091043 :

A, B, C, D, E, F, G, H seien die Eckpunkte eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abb. gewählt seien. K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $\overline{DY} = \overline{EX}$ ist.

Man beweise, daß der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.



Aufgabe 091044:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2 \cdot (x-1) + t \cdot (x+1) = 0$ sind, so gilt:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = -1\,.$$

Aufgabe 091045:

Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks ΔABC, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von Dreieck ΔABC liegen.

Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck ΔABC entweder auf k' oder auf k'' liegt!

Aufgabe 091046:

Man beweise folgenden Satz!

Wenn in einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung keine rationale Lösung.