



9. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben





9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 091221:

Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ durch die (independent) Darstellung

$$a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0, \tag{1}$$

wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind. Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge $D_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzenfolge die Folge $D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$).

- a) Es seien $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind $a_n, D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 zu berechnen.
- b) Es ist allgemein zu beweisen, daß für (1) die Folge $D_n^{(2)}$ konstant ist.

Aufgabe 091222:

In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ε die Ebene durch G, B, E .

Es ist zu beweisen, daß die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ε steht und von ihr im Verhältnis $1 : 2$ geteilt wird.

Aufgabe 091223:

Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \tag{1}$$

$$x - y = bz \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = cz \tag{3}$$

Dabei sind a, b, c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 091224:

Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so daß ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:

Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muß, hat verloren.

Welche Beziehung zwischen k und n muß erfüllt sein, damit

- a) der anziehende Spieler,
- b) der nachziehende Spieler

den Gewinn erzwingen kann?