9. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091241:

An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.

Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.

Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.

Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

Aufgabe 091242:

Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks ΔABC möglichst klein ist.

Aufgabe 091243:

Es ist zu beweisen, daß für jedes ganzzahlige $n \geqslant 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \text{ höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.}$$

Aufgabe 091244:

Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bezeichnet.

a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) können parallel zu sich selbst so verschoben werden, daß sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.

b) Es ist zu beweisen (z.B. mit Hilfe des Satzes unter a)), daß folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 091245:
Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei

reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

Aufgabe 091246:
Es ist zu beweisen, daß für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.