10. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1970/1971

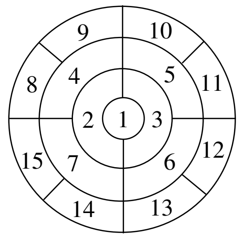
Aufgaben

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100831:

Die Abbildung zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend numeriert wurden.



Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

Aufgabe 100832:

Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.

Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde! (Es sei angenommen, daß beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

Aufgabe 100833:

Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.

Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, daß der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

Aufgabe 100834:

Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, so daß folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Aufgabe 100835:

Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:

(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.

(2) Es gibt in unserem Haus mehr Jungen als Mädchen.

(3) Jeder der Jungen hat wenigstens eine Schwester.

(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Haus.

(5) Alle in unserem Haus wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.

(6) Außer den Ehepaaren mit ihren schulpflichtigen Kindern wohnt niemand in unserem Haus.

Brigitte entgegnet darauf: "Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein."

Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

Aufgabe 100836:
Beweise den folgenden Satz:

Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks ΔABC, dann halbieren die Höhen des Dreiecks ΔABC die Innenwinkel des Dreiecks $\sphericalangle DEF$!

(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\sphericalangle EFD$ zu führen.)