10. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1970/1971

Aufgaben

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101031:

a) Beweisen Sie folgenden Satz!

Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.

b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$. Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, daß man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder daß man x mit y vertauscht oder daß man beides durchführt.

Aufgabe 101032:

Es sei ΔABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 101033:

Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, daß für jedes reelle x $\quad f(x) = f(x+1) - a \quad$ gilt!

Aufgabe 101034:

Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \cdots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x} \text{ gilt!}$$

Aufgabe 101035:

Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte.

Nach Abschluß des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt. Der zweitbeste

Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.

Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt: A, der sich besser als D placierte, erreichte wie dieser kein Remis. C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.

Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

Aufgabe 101036:

Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet.

Es ist zu beweisen, daß es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so daß der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.