10. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1970/1971

Aufgaben

10. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101041:

Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, daß in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

Aufgabe 101042:

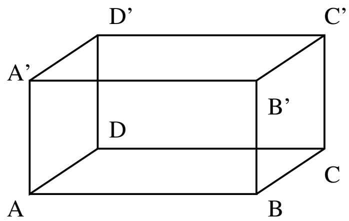
Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und den Kantenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{AA'} = c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. A', D, C' bzw. B', C, D' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten.

Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.

a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\left(\alpha = 60°, q = \frac{1}{3}\right)$ dar.

Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm zu zeichnen.

b) Man berechne $V_R : V_Q$.



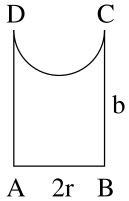
Aufgabe 101043A:

Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die

$$[\log_{12} c] \leqslant [\log_4 c] \text{ gilt.}$$

Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Aufgabe 101043B:



Die Abb. zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$, $b > r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ entstanden ist.

Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r < b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.

Aufgabe 101044:

Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(x + 1) = f(-x)$ erfüllen.

Aufgabe 101045:

Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl.

Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung $\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$ erfüllen.

Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r < -6$.

b) Es sei $r = -6$.

c) Es sei $-6 < r < 0$.

d) Es sei $r > 0$.

Aufgabe 101046:

Die Fläche eines Dreiecks ΔABC soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden:

Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, daß E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks ΔABC, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt. Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks ΔEFD sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.

Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!