10. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1970/1971

Aufgaben

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101211:

In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil.

Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

Aufgabe 101212:

In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, daß jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a!

Anmerkung: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.

Aufgabe 101213:

Beweisen Sie!

Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$ gilt: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$.

Aufgabe 101214:

Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x) = ax^2 + bx + c$ gesetzt.

a) Man beweise, daß folgender Schluß richtig ist:

   Voraussetzung: $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.

   Behauptung: Für jede ganze Zahl x ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0), f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel (p, q, r) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, daß ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.