11. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1971/1972

Aufgaben

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 111031:

Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen a, b mit $a \neq 0$, $b \neq 0$, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.

(2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

Aufgabe 111032:

Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x; y)$ jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:

a) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.

b) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

Aufgabe 111033:

Gegeben sei die Kathetenlänge $\overline{BC} = a$ eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC mit dem rechten Winkel bei C, für das $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ gilt. Die Halbierende des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D.

Man berechne die Länge der Sehne $\overline{CD}$ als Funktion von a!

Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Aufgabe 111034:

Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R = 6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, daß die Achse des Kegels mit der des Bohrlochs zusammenfällt.

Wie groß muß der Radius r (R, h, r in cm gemessen) des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

Aufgabe 111035:

Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p, d.h. für alle reellen x gelte $f(x + p) = f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt.

Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

$$\text{a) } F(x) = \frac{1}{2} f(x); \qquad \text{b) } G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)?$$

Aufgabe 111036:
Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus $a - b = 3\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$ und $\beta = 50°$! Dabei seien a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!