11. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1971/1972

Aufgaben

11. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 111041:

a) Man beweise den folgenden Satz!

Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zwei dieser Primzahlen durch 6 teilbar.

b) Man beweise, daß die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, daß jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird!

Aufgabe 111042:
Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:

a) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82 944 000 000.

b) Ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist gleich 24.

c) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120 000.

d) Der größter gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1 200.

e) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30 000.

Aufgabe 111043A:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $\overline{AB} = \overline{AD} > \overline{BC} = \overline{CD}$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{FB}$ gilt. Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $\overline{EC} = \overline{BC} (= \overline{CD})$ und $\overline{FE} = \overline{FB}$ gilt.

Beweisen Sie, daß E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

Aufgabe 111043B:
Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung anhand der Lösung der folgenden Aufgabe:

Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, daß A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.

Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert! Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a : b$, wobei $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ bedeutet.

Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, daß er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe.

Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

Aufgabe 111044:

Ermitteln Sie alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m, einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$-2x + 3y = 2m \qquad (1)$$
$$x - 5y = -11 \qquad (2)$$

Aufgabe 111045:

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrates verschiedener Punkt P. Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1, die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2 . Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D.

Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q, der von g_2 und h_1 sei R, der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt. Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, daß $EFGH$ ein Rechteck ist. Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.

Ermitteln Sie $I_1 : I_2$.

Aufgabe 111046:

Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke ΔBCD, ΔACD, ΔABD bzw. ΔABC.

Man beweise, daß dann $\quad \frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = 1 \quad$ gilt!