11. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1971/1972

Aufgaben

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 111211:

Fünf Soldaten A, B, C, D, E aus fünf sozialistischen Staaten treffen sich auf einem Meeting bei einem gemeinsamen Manöver der befreundeten Armeen. An dem Manöver nehmen nur Angehörige der bulgarischen, polnischen, ungarischen, sowjetischen Streitkräfte und der Nationalen Volksarmee der DDR teil. Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Jeder der Soldaten A, B, C und D beherrscht außer der Sprache seines Staates als "Zweitsprache" noch genau eine der folgenden Sprachen: Bulgarisch, Polnisch, Ungarisch, Russisch, Deutsch.

(1a) Diese vier Zweitsprachen sind paarweise voneinander verschieden.

(2) E beherrscht keine Fremdsprache.

(3) A beherrscht eine Sprache, die außer ihm auch der Sowjetsoldat beherrscht.

(4) B beherrscht keine slawische Sprache, also weder Bulgarisch noch Polnisch noch Russisch.

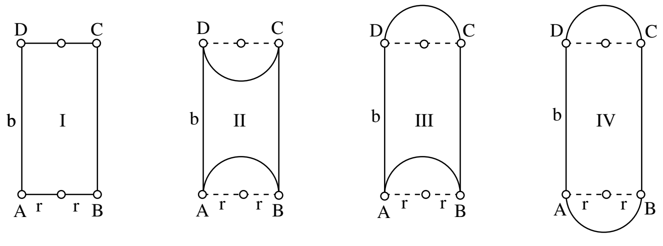
(5) Der NVA-Angehörige kann sich genau dann mit E verständigen, wenn einer der drei anderen Soldaten, nämlich C, als Übersetzer fungiert.

(6) Der Bulgare kann sich mit dem Ungarn nur über zwei der anderen Soldaten, und zwar D und B, verständigen.

Es ist für jeden dieser Soldaten festzustellen, welchem Staat er angehört und welche Zweitsprache er - wenn überhaupt - beherrscht.

Aufgabe 111212:

a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren (I bis IV), die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedesmal $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:



Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt F am kleinsten ist? Wenn ja, so sind sämtliche derartigen Streckenverhältnisse anzugeben.

Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.

b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b = 0$ zugelassen, falls in diesem Falle der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird.

Aufgabe 111213:

Es sind alle nichtnegativen reellen Zahlen k anzugeben, für die das Polynom $f(x) = (x + 1)^4 - (kx)^2$

a) genau eine,

b) genau zwei voneinander verschiedene,

c) genau drei paarweise verschiedene,

d) genau vier paarweise verschiedene,

e) keine

reelle(n) Nullstelle(n) hat.

Aufgabe 111214:

In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} \geqslant \overline{BC} \geqslant \overline{AC}$ sei P ein im Inneren des Dreiecks gelegener Punkt.

Man beweise, daß dann stets $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt.