11. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1971/1972

Aufgaben

11. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 111241:

Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck

$$\frac{2x}{|x-3|-5}+\frac{1}{x+2} \tag{1}$$

existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die folgende Ungleichung (2) erfüllen:

$$\frac{2x}{|x-3|-5}+\frac{1}{x+2} \geqslant 1\,. \tag{2}$$

Aufgabe 111242:

Es sei

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die } x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ gilt } (k=0,\pm 1,\pm,\dots) \\ 0 & \text{für alle } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi. \end{cases}.$$

Man beweise, daß die für alle reellen x durch $F(x)=f(x)+f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 111243:

Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei der Punkte P_i, P_j $(i,\ j=1,2,3)$ bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen 0° und 180° liegt.

Man beweise, daß für diese Größen die Ungleichung $\alpha_{23}+\alpha_{31}>\alpha_{12}$ gilt.

Aufgabe 111244:

a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die die Gleichung $x^3z+x^2y+xz+y=x^5+x^3$ erfüllen.

b) Man gebe unter den in a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

Aufgabe 111245:

Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x, geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:

Fängt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge der Zahl $x+1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechsstelligen Quadratzahl.

Aufgabe 111246A:

Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leqslant n \leqslant 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, daß auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt.

Man beweise, daß dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

Aufgabe 111246B:

Als "Abstand" zweier Funktionen f und g, die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert. Es seien die im Intervall $-2 \leqslant x \leqslant 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben.

Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der "Abstand" von f und g möglichst klein ist. Gibt es ein solches a, so gebe man alle derartigen Werte a an.