12. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1972/1973

Aufgaben

12. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 121041:

a) Zeigen Sie, daß es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist!

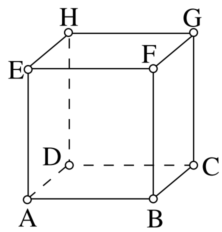
   Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkeln genau m spitz sind.

b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m!

c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

Aufgabe 121042:

Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H; B, E, G; C, F, H; D, E, G; E, B, D; F, A, C; G, B, D und H, A, C in Teilkörper zerlegt.



a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!

b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!

Aufgabe 121043A:

a) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat!

b) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AB} = \overline{AD} = x$, $\overline{CB} = \overline{CD} = y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat!

c) Man beweise! Sind M und U die Mittelpunkte und ρ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt:

$$|MU|^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}\,.$$

Aufgabe 121043B:

Dirk und Jens spielen ein Spiel mit folgenden Regeln:

Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen "Zug". Ein "Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen "Zug" zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen. Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am "Zug" befindliche Spieler aber keinen

"Zug" nach den Spielregeln ausführen kann.

Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Aufgabe 121044:

In einer Ebene mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x,\, y)$ sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$. Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.

Man beweise, daß k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0; 1)$!

Aufgabe 121045:

Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe!

Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, daß sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adisch-zweistellige Zahl ergibt und daß man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?

Aufgabe 121046:

Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D.

Die erste Karawane marschierte jeweils drei Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils zwei Tage hintereinander und legte dann zwei Ruhetage ein. Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.

Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.

Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.

Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!