12. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1972/1973

Aufgaben

12. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 121241:

Man untersuche, ob unter allen Paaren (a, b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a,b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

Aufgabe 121242:

Es sind alle Paare (x, y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2 \quad \text{erfüllt ist.}$$

Aufgabe 121243:

Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

Aufgabe 121244:

Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(3; 4; 0)$ bzw. $(10; 8; 4)$.

Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so daß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

Aufgabe 121245:

Jemand schrieb auf die sechs Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen 0 und 1 befanden. Danach ersetzt er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der vier Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatten. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden mußte.)

Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzig mal durch. Zum Schluß stellte er fest, daß er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.

Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

Aufgabe 121246A:

Man zeige , daß der Term

$$\frac{(14+\cos x)\cdot \sin x}{9+6\cdot \cos x}$$

im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, daß für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenzen beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.

Anmerkung: Es gilt $\pi = 3{,}14159 + \delta$ mit $0 < \delta < 10^{-5}$ und $\sqrt{2} = 1{,}41421 + \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 10^{-5}$.

Aufgabe 121246B:

In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreise k_1 und k_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC so, daß B auf k_1 und C auf k_2 liegen.

a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.

b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke ΔABC in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solcher Dreiecke gibt.