13. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1973/1974

Aufgaben

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130931:

Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x, y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:

Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z.B. (25; 61), denn es gilt $52+9 = 61$ und $16+9 = 25$.)

Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").

Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!

b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

Aufgabe 130932:

Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ durch 10 teilbar ist!

Aufgabe 130933:

Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb von g sei so gelegen, daß PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte $\overline{PC} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$.

Man beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle APF} = 135°$ gilt.

Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Aufgabe 130934:

In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, daß die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.

Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

Aufgabe 130935:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit a, b, $c \neq 0$ und $a + b + c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.

(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

Aufgabe 130936:

Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:

a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,

b) $\overline{BD'} = \overline{CD'} = a$,

c) $\overline{AD'} \neq a$.

Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.