13. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1973/1974

Aufgaben

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131031:

Man beweise, daß für alle konvexen Vierecke $ABCD$ $\frac{1}{2}u < e + f < u$ gilt!

Dabei sei u der Umfang des Vierecks, und e und f seien die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.

Aufgabe 131032:

Man ermittle alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen!

Aufgabe 131033:

Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die Länge a. E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.

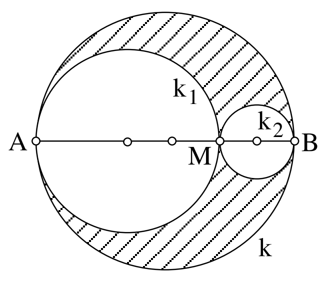
Errechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

Aufgabe 131034:

Man beweise: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

Aufgabe 131035:

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Durchmesser AB der Länge d. In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, daß sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so daß also $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$ gilt. Dabei sei $\overline{AM} \geq \overline{MB}$.



Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.

Man ermittle diejenige Länge von $\overline{AM}$, für die der Flächeninhalt dieser schraffierten Fläche am größten ist!

Aufgabe 131036:

Man beweise, daß die Ungleichung $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$ für alle Paare positiver reeller Zahlen (a, b) mit $a \neq 1$, $b \neq 1$ gilt!