13. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1973/1974

Aufgaben

13. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131041:

In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck ABC, darin ein Halbkreis k_1 (mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1) und ein Kreis k_2 (mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2) so gezeichnet, daß sie den folgenden Bedingungen genügen:

(1) M_1 liegt auf der Strecke AB,

(2) k_1 berührt jede der Strecken AC und BC,

(3) k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC.

Man zeige, daß dann $r_1 > r_2$ gilt und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$.

Aufgabe 131042:

Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $s_a = 6$ cm, $s_b = 8$ cm!

Dabei seien s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die Länge der Seitenhalbierenden von AC.

Beschreiben und begründen Sie ihre Konstruktion. Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 131043A:

a) Beweisen Sie, daß man zu gegebenem reellen x_0 die Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann!

Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt 0 dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten (1;1) hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x-Achse liegen. Auf q zeichnet man einen Punkt X so, daß die gerichtete Strecke EX die Länge x_0 hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_0. Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y-Achse in einem Punkt Y. Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ als Ordinate.

b) Beweisen Sie mit diesem grafischen Verfahren, daß die durch $f(x) = x^2 + x + 1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat!

Aufgabe 131043B:

Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die Gleichung $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen!

Aufgabe 131044:

Man untersuche, ob die Zahl $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$ positiv, negativ oder gleich Null ist!

Aufgabe 131045:

Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1$$

Aufgabe 131046:

Ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D und der Kantenlänge a werde durch sechs paarweise voneinander verschiedene Ebenen geschnitten, wobei jede der Ebenen von dem Tetraeder genau eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalte.

a) Wieviel Teilkörper entstehen insgesamt, wenn man sich alle Schnitte gleichzeitig ausgeführt denkt?

b) Berechnen Sie die Volumina der einzelnen Teilkörper unter Verwendung der Kantenlänge a.