14. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1974/1975

Aufgaben

14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 141031:

In
$$\begin{array}{ccccc} & A & R & Z & T \\ + & A & R & Z & T \\ \hline Ä & R & Z & T & E \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

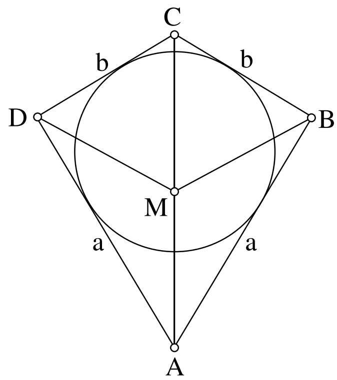
Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben.)

Aufgabe 141032:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Ist $ABCD$ ein (konvexes) Drachenviereck mit $\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{BC} = \overline{DC} = b$ und dem Inkreismittelpunkt M, dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BM}}{\overline{CM} \cdot \overline{DM}}$$



Aufgabe 141033:

Gegeben sei eine positive reelle Zahl a, für die $a \neq 1$ gilt.

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $x^{\log_a x} = a^2 x$ erfüllen!

Aufgabe 141034:

Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung $f(n) = a^n + b^n + (a + b)^n$ definierte Funktion.

Beweisen Sie, daß dann $[f(2)]^2 = 2 \cdot f(4)$ gilt!

Aufgabe 141035:

Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ an, für die die Zahl $n^2 + 6n - 187$ ohne Rest durch 19 teilbar ist!

Aufgabe 141036:

Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben:

Schneidet die Parallele durch Q zu XR die Verlängerung von OR über R hinaus in Y, so gilt $PY \parallel XQ$.

Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren! Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt!