



**14. Mathematik Olympiade**  
**4. Stufe (DDR-Olympiade)**  
**Klasse 10**  
**Saison 1974/1975**

Aufgaben





14. Mathematik-Olympiade  
4. Stufe (DDR-Olympiade)  
Klasse 10  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 141041:

$$\text{Es sei } z = \left(1 - \frac{4}{1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{4}{199^2}\right).$$

Man stelle die rationale Zahl  $z$  in der Form  $z = \frac{p}{q}$  dar, wobei  $p, q$  ganze, teilerfremde Zahlen sind und  $q > 0$  ist!

Aufgabe 141042:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Ist  $ABCD$  ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\overline{CD} = c$ ,  $\overline{AD} = d$  und dem Inkreismittelpunkt  $M$ , so gilt:

$$\frac{a}{c} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BM}}{\overline{CM} \cdot \overline{DM}}.$$

Aufgabe 141043A:

Es sei  $ABCD$  eine geraden vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche  $ABCD$ . Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge  $PQRT$ , wobei  $P$  ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante  $AS$ ,  $Q$  ein innerer Punkt von  $BS$ ,  $R$  von  $CS$  sowie  $T$  von  $DS$  ist.

Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen  $\rho$  ( $0^\circ < \rho < 90^\circ$ ), für die folgendes gilt: Hat der Winkel  $\sphericalangle ASB$  die Größe  $\rho$ , so existiert unter den auf der Pyramide  $ABCD$  betrachteten Streckenzügen  $PQRT$  ein kürzester.

Aufgabe 141043B:

Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining. Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände: Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, daß jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

- Uwe: "Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht."  
Monika: "Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht."  
Peter: "Ich habe den Zirkel, oder Klaus hat das Lineal nicht."  
Klaus: "Ich habe das Lineal nicht, oder Uwe hat den Bleistift."  
Ilona: "Ich habe den Füller, oder ich habe den Bleistift."

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen! Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?



Aufgabe 141044:

Man ermittle alle rationalen Zahlen  $r$ , die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r = 4!$$

Aufgabe 141045:

In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen  $f$  und  $g$ , daß beide für alle reellen Zahlen  $x$  definiert sind,  $f$  im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst, und daß die Gleichung  $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$  für alle  $x$  erfüllt ist.

Annemarie folgert nun daraus: "Dann ist auch  $g$  eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion."

Brigitte widerspricht: "Es läßt sich nur schließen, daß  $g$  im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist."

Christa meint: "Ihr habt beide nicht recht."

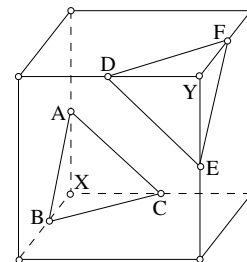
Wer von diesen Schülern hat nun recht?

*Anmerkung:* Eine Funktion  $f$  wird genau dann streng monoton wachsend bzw. fallend in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen  $x_1, x_2$  aus diesem Intervall, für die  $x_1 < x_2$  gilt, die Ungleichung

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 141046:

Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge  $a$ . Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte  $X$  und  $Y$ . Die Mittelpunkte der von  $X$  ausgehenden Würfelkanten seien mit  $A, B, C$ , die Mittelpunkte der von  $Y$  ausgehenden Würfelkanten mit  $D, E, F$  so bezeichnet, daß  $A$  und  $E$  auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso  $B$  und  $F$  und ebenso  $C$  und  $D$ .



- a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten  $A, B, C$  und den Punkten  $D, E, F$  so zu wählen, daß folgendes gilt!

Die drei Strecken, die jeden der Punkte  $A, B, C$  jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken  $AB, BC, CA, DE, EF, FD$  sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (das ist ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.

- b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen!