15. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1975/1976

Aufgaben

15. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150931:

Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

Aufgabe 150932:

Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{BC} = a$ und die Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, daß BC auf g liegt.

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

Aufgabe 150933:

Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2) von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!

A_1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.
A_2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.

B_1) $x - 5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.
B_2) $x + 1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.

C_1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.
C_2) x ist die Zahl 389.

D_1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397.
D_2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

Aufgabe 150934:

Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

Aufgabe 150935:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

Aufgabe 150936:

Beweisen Sie, daß für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc = 1$ die Ungleichung

$$(1 + a)\,(1 + b)\,(1 + c) \geq 8 \quad \text{gilt!}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?