15. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1975/1976

Aufgaben

15. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 151031:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $\overline{BC} = a$ und der Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A.

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a!

Aufgabe 151032:

Gegeben sei eine Strecke AB mit $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$.

Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB zu sein!

Aufgabe 151033:

Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt $(1 + a^2x^2) : x^2 = b$ (mit gegebenen Zahlen a, b) versehentlich die Gleichung $(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = b$ (mit denselben Zahlen a, b) gedruckt. Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.

Man ermittle diese Lösungsmenge!

Aufgabe 151034:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen AA', BB' und CC' und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HA'}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HB'}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{HC'}}$$

gelten, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Aufgabe 151035:

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x > 0$, für die folgendes gilt!

Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x. (Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

Aufgabe 151036:

Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist: $[x] \leq x < [x] + 1$.

Beispielsweise ist $[\pi] = 3$, $[-4,2] = -5$, $[5] = 5$.

Eine Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt, so daß für alle x gilt: $f(x + p) = f(x)$. Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f. Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f.

Beispielsweise ist $f(x) = 1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z.B. $f(x) = \sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.

a) Beweisen Sie, daß durch $y = (-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen x erklärte Funktion f definiert ist!

b) Beweisen Sie, daß die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!

c) Weisen Sie nach, daß diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!

d) Stellen Sie f graphisch dar!