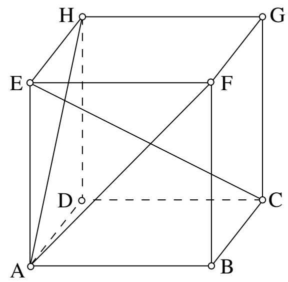
15. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1975/1976

Aufgaben

15. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

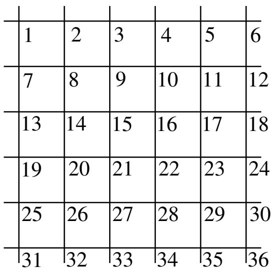
Aufgabe 151041:



Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a. Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, daß sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt.

Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!

Aufgabe 151042:



In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die in der Abbildung dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, daß

(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,

(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und

(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.

Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, daß es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!

Aufgabe 151043A:

Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$ bezeichnet, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.

Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die $-10 \leq x \leq 2$ und $[x^2] = [x]^2$ gilt!

Aufgabe 151043B:

In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x; y)$ seien die Punkte $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ sowie der Graph k derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist.

Man beweise: Es gibt eine Zahl c, so daß k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist.

Man ermittle diese Zahl c!

Aufgabe 151044:
Man ermittle alle ungeordneten Paare (x, y) aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt!

Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{xy}$).

Aufgabe 151045:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s, R, r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an der Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.

Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert! Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!

Aufgabe 151046:
Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, daß f nullstellenfrei ist, d.h., daß keine reelle Zahl x mit $f(x) = 0$ existiert.

Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, daß auch die durch $F(x) = f(2x)+f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!