



**15. Mathematik Olympiade**  
**3. Stufe (Bezirksolympiade)**  
**Klasse 12**  
**Saison 1975/1976**

Aufgaben





15. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Bezirksolympiade)  
Klasse 12  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 151231:

Jemand löste eine Divisionsaufgabe  $A$ ; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren.

Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest. Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe  $A$  eine neue Divisionsaufgabe  $A'$ , indem er sowohl im Dividenten als auch im Divisor je eine Ziffer weglassen ließ. Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe  $A$ .

Man nenne (durch Angabe von Divident und Divisor) alle Divisionsaufgaben  $A$ , die diese Eigenschaft aufweisen.

Aufgabe 151232:

Ist  $\mathfrak{M}$  eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl  $e \neq 0$  aus dieser Menge als eine "Einheit von  $\mathfrak{M}$ " bezeichnet werden, wenn für jedes Element  $x$  aus  $\mathfrak{M}$  die Beziehung  $\frac{x}{e} \in \mathfrak{M}$  gilt.

(So besitzt z.B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten  $+1$  und  $-1$ , während z.B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)

Es sei nun  $\mathfrak{M}$  die Menge aller Zahlen  $a + b\sqrt{2}$ , wobei  $a$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z.B.  $+1$  und  $-1$  Einheiten.

- a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von  $\mathfrak{M}$  an.
- b) Man beweise, daß  $\mathfrak{M}$  unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

Aufgabe 151233:

Es seien  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises  $k$ . Ferner seien  $X$  bzw.  $Y$  bzw.  $Z$  die zu  $A_2$  bzw.  $B_2$  bzw.  $C_2$  bezüglich der Mittelpunkte der Sehnen  $B_1C_1$  bzw.  $C_1A_1$  bzw.  $A_1B_1$  symmetrisch liegende Punkte.

Man beweise, daß  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  auf ein und derselben Geraden liegen.

Aufgabe 151234:

*Definition:* Eine gebrochene rationale Funktion  $f$  heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0; \quad a_m \neq 0$$
$$v(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0; \quad b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad m < n$$



darstellen läßt.

Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion 0

$$\left[ = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit} \quad u(x) = a_m x^m + \dots + a_0, \quad \text{alle} \quad a_m = \dots = a_0 = 0 \right]$$

verschieden ist.

Aufgabe 151235:

In der Ebene mögen  $n$  Punkte ( $n \geq 4$ ) so gelegen sein, daß je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind.

Man beweise, daß dann alle  $n$  Punkte Eckpunkte eines konvexen  $n$ -Ecks sind.

Aufgabe 151236A:

Gegeben seien  $n$  Punkte einer Ebene ( $n > 0$ ), von denen keine drei auf derselben Geraden liegen. Die  $n$  Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, daß es keine drei Punkte gibt, von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.

Man zeige, daß sich unter diesen Bedingungen für die Anzahl  $Z_v$  der Verbindungsstrecken

$$Z_v \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \quad \text{gilt.}$$

Man zeige ferner, daß sich unter Beachtung der Bedingungen  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  Verbindungsstrecken finden lassen.

*Anmerkung:* Mit  $[x]$  sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als  $x$  ist.

Aufgabe 151236B:

Es seien  $P(x)$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten und  $p, q, r, s$  reelle Zahlen, für die  $p \neq q$  gelte. Bei der Division dieses Polynoms durch  $(x - p)$  ergebe sich als Rest die Zahl  $r$ , bei der Division des gleichen Polynoms durch  $(x - q)$  als Rest die Zahl  $s$ .

Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms  $P(x)$  durch

$$(x - p)(x - q)?$$