15. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1975/1976

Aufgaben

15. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 151241:

Man untersuche, ob es ein Polynom $P(x)$ dritten Grades gibt, so daß $P(0) = 74$, $P(1) = 19$, $P(2) = 65$ und $P(3) = 92$ gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man $P(4)$ und $P(5)$.

Aufgabe 151242:

Man ermittle die Menge aller derjenigen positiven reellen Zahlen r, für die folgende Aussage wahr ist:

Für jede positive reelle Zahl a hat die für alle reellen x durch $f(x) = 4 - x^2 - ax^3$ definierte Funktion f zwischen den Zahlen $2 - ar$ und 2 eine Nullstelle.

Aufgabe 151243:

P bezeichne einen Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der von den Eckpunkten dieses Dreiecks die Abstände $\overline{PA} = u$, $\overline{PB} = v$, $\overline{PC} = w$ hat.

Man berechne die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks ABC aus u, v, w.

Aufgabe 151244:

Es sei f diejenige Funktion, die als Definitionsbereich die Menge aller Tripel (x, y, z) von nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ hat und die jedem solcher Tripel jeweils die Zahl

$$f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$$

zuordnet.

Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f und weisen Sie nach, daß jeder Wert in diesem Bereich angenommen wird!

Aufgabe 151245:

Bekanntlich gilt: Für jede natürliche Zahl n gilt: Eine Ebene wird durch n Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt laufen und keine zwei parallel sind, in genau $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Teile zerlegt.

Man ermittle für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Teile, in die der Raum durch n Ebenen zerlegt wird, von denen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen, keine drei zueinander parallele oder zusammenfallende Schnittgeraden besitzen sind und keine zwei zueinander parallel sind.

Aufgabe 151246A:

Mit R_n wird die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen bezeichnet. In R_n ist durch

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

eine Addition und durch

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \quad \lambda \text{ reell},$$

die Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl λ definiert.

Es sei M eine Teilmenge von R_n, für die gilt:

Mit $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ gilt für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n) \in M. \tag{1}$$

Ein n-Tupel $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ heißt x-Element von M, wenn aus $(s_1, s_2, ..., s_n) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{1}{2}(y_1, y_2, ..., y_n)$ mit $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets $s_1 = x_1 = y_1$, $s_2 = x_2 = y_2$, ... , $s_n = x_n = y_n$ und damit $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt.

Man zeige: $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ist x-Element genau dann, wenn für beliebiges λ mit $0 < \lambda < 1$ aus $(s_1, s_2, ..., s_n) = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n)$ mit $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets $s_1 = x_1 = y_1$, $s_2 = x_2 = y_2$, ... , $s_n = x_n = y_n$, also $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt.

Aufgabe 151246B:

In der mathematischen Statistik werden häufig Summen der folgenden Form benötigt:

$$M = \sum_{k=0}^{n=1} \binom{2n-1}{2k}; \qquad N = \sum_{k=0}^{n=1} \binom{2n}{2k}; \qquad m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n=1} \binom{2n}{2k},$$

wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist.

a) Man berechne die Summen M, N und m.

b) Es sei f die für alle reellen x durch

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n=1} (k - x)^2 \binom{2n}{2k}$$

definierte Funktion.

Man berechne $f(x)$ und weise nach, daß f einen kleinsten Funktionswert besitzt und diesen genau für $x = m$ annimmt.