16. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1976/1977

Aufgaben

16. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160831:

Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stellte er fest, daß er diese Summe nicht "passend" hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M, 20 M) Uwe hiernach bei sich haben konnte!

Aufgabe 160832:

Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umbeschrieben, daß jede der Trapezseiten den Kreis berührt.

Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle BMC} = 90°$ ist!

Aufgabe 160833:

In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau $600\,\text{cm}^3$ Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit seinen verschiedenen Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so ergibt sich für die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm und einmal 4 cm.

Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Angaben entsprechen!

Bemerkung: Der Wasserspiegel sei als Teil einer horizontalen Ebene angenommen, die Adhäsion werde vernachlässigt.

Aufgabe 160834:

Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z.B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargelegt werden soll:

(1)	Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern	$7 \cdot 2 = 14$
(2)	Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf	
	(Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man	
	zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.)	1414
(3)	Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern	$49 + 4 = 53$
(4)	Man hängt an das Ergebnis eine Null an	530

(5) Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4)

und erhält damit das gesuchte Produkt $1\,414 + 530 = 1\,944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Aufgabe 160835:

Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt S, seine Schenkel seien die Strahlen a und b; seine Winkelhalbierende sei der Strahl w. Gegeben sei ferner ein auf w gelegener Punkt $P \neq S$.

Konstruiere einen Kreis k, der a und b berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe Deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 160836:

Gegeben seien eine Länge r und eine Länge $a \leq 2r$. Auf einem Kreis k mit dem Radius r seien A und B zwei Punkte, deren Abstand a beträgt. Weiterhin seien mit P_1 und P_2 zwei solche Punkte von k bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B liegen.

a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten P_1 und P_2 solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks AP_1BP_2 am größten ist. Beweise, daß es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf k.

b) Ermittle den entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2!