16. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1976/1977

Aufgaben

16. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160931:
Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n-Eck habe die Eigenschaft, daß es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n-Ecks!

Aufgabe 160932:
Man beweise folgenden Satz:

Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt

$$(a + 1) \cdot (b + 1) \geq 4 \tag{1}$$

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

Aufgabe 160933:
Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:

(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.

(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $a\sqrt{2}$.

a) Zeigen Sie, daß zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!

b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

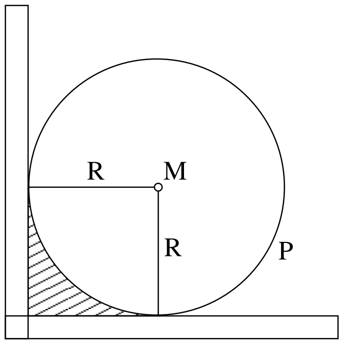
Aufgabe 160934:
Beweisen Sie, daß für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $(3n - 1) \cdot p^2 + 1$ Primzahl ist!

Aufgabe 160935:
Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.

Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

Aufgabe 160936:

Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, daß sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung). In den durch Schraffur gekennzeichneten Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.



a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.

b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.