16. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1976/1977

Aufgaben

16. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 161031:

In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \perp CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ sei a die Länge der Seiten BC, CD und DA. Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, daß

der Kreis um A die Seite AB in H und die Seite AD in E,

der Kreis um B die Seite AB in I und die Seite BC in F,

der Kreis um C die Seite BC in F und die Seite CD in G und

der Kreis um D die Seite CD in G und die Seite AD in E schneide.

Der über HI errichtete Halbkreis berühre die um C und D gezeichneten Kreise von außen in den Punkten N und P.

Ermitteln Sie die Länge der Seite AB!

Aufgabe 161032:

Von einer Gleichung $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ werde vorausgesetzt, daß alle Koeffizienten a_3, a_2, a_1 und a_0 ganze Zahlen sind.

Beweisen Sie, daß dann folgender Satz gilt!

Wenn eine rationale Zahl x eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist x eine ganze Zahl.

Aufgabe 161033:

Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

$$\begin{array}{cccccc} & & I & N & E & S \\ + & & J & E & N & S \\ + & & A & M & E & S \\ \hline & N & A & M & E & N \end{array}$$

a) Zeigen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!

b) Zeigen Sie, daß die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!

Hinweis: Sind a_0, a_1, a_2, ... , a_n ganze Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, ..., n)$ und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n...a_2a_1a_0$ im System mit der Basis 8 die Zahl

$$z = a_n8^n + a_{n-1}8^{n-1} + ... + a_28^2 + a_18^1 + a_08^0.$$

Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl z auch mit $z = [a_n...a_2a_1a_0]_8$ bezeichnen.

Aufgabe 161034:

Beweisen Sie, daß

$$\lg\left(1+\frac{1}{1}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots\lg\left(1+\frac{1}{99}\right)=2 \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 161035:

Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrundegelegt: Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.

Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge h des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrundegelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat!

Aufgabe 161036:

Konstruieren Sie ein Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AD}=\overline{CD}$, $\overline{AB}=\overline{CB}$ aus $a+b=12\,\text{cm}$, $f=9\,\text{cm}$ und $\beta+\delta=172°$!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite AD, f die Länge der Diagonalen BD, β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ und δ die Größe des Winkels $\sphericalangle ADC$.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert, und beweisen Sie, daß alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!