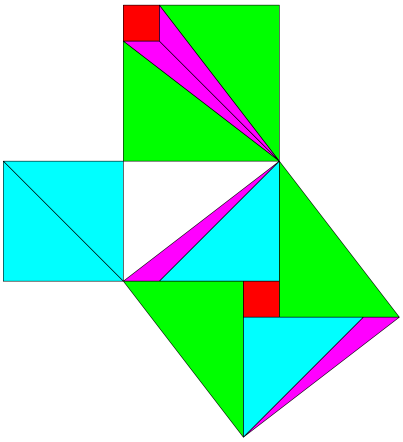
16. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1976/1977

Aufgaben



16. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 161041:

Man beweise den folgenden Satz!

Ist $OPQR$ ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf seiner Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf seiner Verlängerung von OR über R hinaus gelegen und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX, so sind die Vierecke $OPSR$ und $SXQY$ einander flächeninhaltsgleich.

Aufgabe 161042:

Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $AB \perp CD$ aus $a + c = 13$ cm, $e + f = 15$ cm, $\phi = 100°$ und $\varepsilon = 70°$!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, c die Länge der Seite CD, e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD, ε die Größe des Winkels $\sphericalangle DAC$ und ϕ die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.

Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 161043A:

Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...). In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, daß die Punktzahl (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurde und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war. Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.

Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, daß die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge). Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte nach zwei Wettkämpfen 16 Punkte erreicht. In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen) siegte der Sportler D. Zweiter wurde der Sportler C.

Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 161043B:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p, für die die Gleichung $\dfrac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$ eine Lösungsmenge L hat, die

a) leer ist,

b) genau ein Element enthält,

c) aus mehr als einem Element besteht!

Aufgabe 161044:

Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x;y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

Aufgabe 161045:

Für ein Rechteck $ABCD$ sei a die Länge der Strecke BC, ferner sei die Diagonale AC eine q-mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F.

Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks $FBED$!

Aufgabe 161046:

In einer Ebene ε sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ε' sei zu ε parallel.

In ε' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, daß die Strecke AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ε senkrecht stehen.

Gegeben seien die Seitenlänge $a = \overline{AC}$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ε und ε'.

Man berechne hieraus das Volumen V des Polyederkörpers, der genau die Strecken AC, CE, EA, $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB', AF', CB', CD', ED' und EF' als Seitenkanten hat.