16. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1976/1977

Aufgaben

16. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 161221:

Es sei R ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A, den Seitenlängen a, b und der Diagonalenlänge d. Ferner sei a das arithmetische Mittel von b und d.

Man ermittle für dieses Rechteck a, b und d in Abhängigkeit von A.

Aufgabe 161222:

Einer Kugel K_1 mit gegebenem Radius r sei ein Zylinder Z_1 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Diesem Zylinder Z_1 sei eine Kugel K_2 und dieser wieder ein Zylinder Z_2 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.

Dieses Verfahren sei weiter fortgesetzt, d.h., liegen für eine natürliche Zahl n bereits eine Kugel K_n und ein Zylinder Z_n mit quadratischem Achsenschnitt vor, so sei dem Zylinder Z_n eine Kugel K_{n+1} und dieser wieder ein Zylinder Z_{n+1} mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.

Für jedes $n = 1, 2, ...$ sei V_n das Volumen der Kugel K_n, und es sei $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$.

a) Man ermittle das Volumen V_{10}.

b) Man ermittle S_{10}.

c) Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, falls dieser Grenzwert existiert.

Hinweis: Ein Zylinder heißt einer Kugel einbeschrieben, wenn die Kreislinien, die seine beiden Grundflächen beranden, auf der Kugel liegen. Eine Kugel in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt heißt diesem Zylinder einbeschrieben, wenn sie seine beiden Grundflächen berührt.

Aufgabe 161223:

In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.

Man beweise, daß es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, der wenigstens drei dieser Punkte in seinem Innern enthält.

Aufgabe 161224:

Es seien x und y

a) nichtnegative reelle Zahlen,

b) nichtnegative ganze Zahlen,

für die die Ungleichungen

$$8x + 3y \leq 25, \tag{1}$$
$$-2x + 3y \leq 10 \tag{2}$$

erfüllt sind.

Man weise nach, daß für die Summe

$$z = 2x + y \tag{3}$$

in den Fällen a) bzw. b) jeweils ein größter Wert existiert, und gebe diesen für jeden der Fälle an.