16. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1976/1977

Aufgaben

16. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 161231:
Man gebe alle Paare (x, y) reeller Zahlen an, für die

$$x^2 + y = 2 \quad \text{und} \qquad (1)$$
$$y^2 + x = 2 \quad \text{gilt.} \qquad (2)$$

Aufgabe 161232:
In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhenlänge h seien Kugeln so einbeschrieben, daß die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen.

Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius r_n der n-ten Kugel aus den gegebenen Längen r und h.

Man weise insbesondere nach, daß die Folge (r_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$q = \frac{h - 2r_1}{h} \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 161233:
Es sei eine Menge von endlich vielen roten und grünen Punkten gegeben, von denen einige durch Strecken verbunden sind. Ein Punkt dieser Menge heiße *außergewöhnlich*, wenn mehr als die Hälfte der von ihm ausgehenden Verbindungsstrecken in Punkten enden, die eine andere Farbe als er haben.

Wenn es in der gegebenen Punktmenge außergewöhnliche Punkte gibt, so wähle man einen beliebigen aus und färbe ihn in die andere Farbe um. Falls in der entstandenen Menge außergewöhnliche Punkte existieren, werde das Verfahren fortgesetzt.

Man beweise: Für jede Menge der beschriebenen Art und für jede Möglichkeit, jeweils außergewöhnliche Punkte zum Umfärben auszuwählen, entsteht nach endlich vielen solchen Umfärbungen eine Menge, die keinen außergewöhnlichen Punkt enthält.

Aufgabe 161234:

a) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ die Ungleichung

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leq \frac{3}{2} \quad \text{gilt.}$$

b) Es sind diejenigen Werte von x, y, z zu ermitteln, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 161235:

In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, daß der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.

Man beweise, daß für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche (einschließlich ihres Randes verstanden) existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält.

Aufgabe 161236A:

Für jede reelle Zahl x mit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ werde in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem der Kreis durch die Punkte $P(0;1)$, $Q(x;\cos x)$ und $R(-x;\cos(-x))$ gelegt.

a) Man gebe eine Funktion f so an, daß für jede dieser Zahlen x der genannte Kreis den Radius $r = f(x)$ hat.

b) Man berechne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.

c) Man ermittle den Wertebereich der Funktion f mit der Menge aller Zahlen x, für die $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, als Definitionsbereich.

Aufgabe 161236B:

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge, für die folgendes gilt:

(1) Jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus $\mathfrak{M}$ ist genau ein Element aus $\mathfrak{M}$ zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei.

(2) Zu jedem $b \in \mathfrak{M}$ und jedem $c \in \mathfrak{M}$ gibt es genau ein $x \in \mathfrak{M}$ so, daß $x \circ b = c$ gilt; dieses Element x werde mit $x = \frac{c}{b}$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen beweise man folgende Aussage:

Wenn für alle $a \in \mathfrak{M}$, $b \in \mathfrak{M}$, $c \in \mathfrak{M}$, $d \in \mathfrak{M}$ die Beziehung $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ gilt, dann gilt für alle $p \in \mathfrak{M}$, $q \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathfrak{M}$, $s \in \mathfrak{M}$ die Beziehung

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{r} : \frac{q}{s}$$

.