16. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1976/1977

Aufgaben

16. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 161241:

Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a < x_0 < b$; das Intervall aller reeller Zahlen x mit $a < x < b$ sei I genannt. Eine in I definierte Funktion f, sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x) = |f(x)|$ definierte Funktion.

Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist g genau dann an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 161242:

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$.

Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, daß jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.

Hinweis: Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

Aufgabe 161243:

Ist $P_1P_2P_3P_4$ eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ε_i und die Größe des Winkels zwischen ε_{i-1} und ε_i mit α_i bezeichnet ($i = 1, 2, 3, 4$; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch den Index 4 ersetzt).

Man beweise: Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

Aufgabe 161244:

Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \quad \text{gilt.} \qquad (1)$$

Aufgabe 161245:

Man ermittle die Anzahl aller Paare (p, q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ und der Eigenschaft, daß die Gleichung $x^5 + px + q = 0$ mindestens eine rationale Lösung hat.

Aufgabe 161246A:

Es sind alle Polynome $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:

Für alle reellen Zahlen x gilt $x \cdot f(x-1) = (x-2) \cdot f(x)$.

Aufgabe 161246B:
Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n-Ecks in eine minimale Anzahl von

a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,

b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.

Hinweis: Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n-Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n-Ecks ist.