



**17. Mathematik Olympiade**  
**1. Stufe (Schulolympiade)**  
**Klasse 9**  
**Saison 1977/1978**

Aufgaben





17. Mathematik-Olympiade  
1. Stufe (Schulolympiade)  
Klasse 9  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 170911:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen ( $\geq 1$ ) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

Aufgabe 170912:

Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d.h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes  $P$  im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke  $PQ$ , wobei  $Q$  folgendermaßen definiert ist: Man lege durch  $P$  einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis  $k$  mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  erscheint. Ist  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$ , so sei  $Q$  der Schnittpunkt von  $k$  mit der Geraden durch  $M$  und  $P$ .

Aufgabe 170913:

Herr  $A$  kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlaß.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, daß er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, daß das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr  $B$ , ein Bekannter von Herrn  $A$ , hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlaß.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn  $A$  einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr  $A$  denjenigen Teilbetrag für Herrn  $B$  mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr  $A$  für Herrn  $B$  damit ausgelegt?

Aufgabe 170914:

Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln "Zeichenreihen" umzuformen. Eine "Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen  $A, B, S, a, b$  in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger



Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

- (1)  $S$  wird ersetzt durch  $A$ .
- (2)  $A$  wird ersetzt durch  $aAB$ .
- (3)  $A$  wird ersetzt durch  $a$ .
- (4)  $B$  wird ersetzt durch  $b$ .

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, daß auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen  $S$  ein.

- a) Ist es möglich, daß der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!
- b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?
- c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!