17. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1977/1978

Aufgaben

17. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 171031:

Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl.

Beweisen Sie, daß dann $(a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n)$ gilt!

Aufgabe 171032:

Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 11$ cm, $\overline{AD} = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von 110° hat.

Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge $\overline{UV}$, die die Seitenlänge eines zu $ABCD$ flächeninhaltsgleichen Quadrates $UVWX$ ist!

Aufgabe 171033:

Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term

$$z = \frac{\lg(7 - 4\sqrt{3}}{\lg(2 - \sqrt{3}}$$

definiert werden soll.

Jens sagt, daß z eine natürliche Zahl ist;

Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl;

Uwe hält z für irrational,

und Peter vermutet, daß der Term überhaupt keine Zahl z definiert.

Entscheiden Sie wer recht hat!

Aufgabe 171034:

Geben Sie alle Primzahlen p an für die $3p + 4 = z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 171035:

Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.

Es ist zu zeigen, daß bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so daß die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Aufgabe 171036:

Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:

(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, daß A auf k' liegt und B und C auf k liegen.

a) Beweisen Sie, daß unter allen so entstandenen Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und daß diese für genau einen Wert r'_1 von r' zustande kommen! Drücken Sie diesen Wert r'_1 und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!

b) Zeigen Sie, daß für den Wert r'_1 auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0 < F_1$ haben! Beweisen Sie, daß es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt, und drücken Sie ihn durch r aus!

c) Beweisen Sie, daß es genau einen Wert r'_2 von r' mit folgender Eigenschaft gibt: Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt! Drücken Sie diesen Wert r'_2 und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!