17. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1977/1978

Aufgaben

17. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 171041:

In einer Ebene ε sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.

Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 171042:

Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl $z = x^2 + x + 6$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist!

Aufgabe 171043A:

Sind $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 3$ $(i = 0, 1, ..., n)$ und gilt $z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + ... + a_1 \cdot 4 + a_0$, so sagt man, z sei im 4adischen System durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz $z = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]_4$. Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4adischen System) $(n + 1)$-stellig.

Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl $z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + ... + a_1^2 + a_0^2$.

Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'' u.s.w.

Beispiel: z = 54:

Es ist $z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 = [312]_4$, d.h., die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist

$$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4^1 + 2 = [32]_4,$$
$$z'' = 3^2 + 2^2 = 13 = 3 \cdot 4^1 + 1 = [31]_4 \quad \text{u.s.w.}$$

Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und läßt bei Darstellungen im 4adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben:

$$312 \to 32 \to 31 \quad \text{u.s.w.}$$

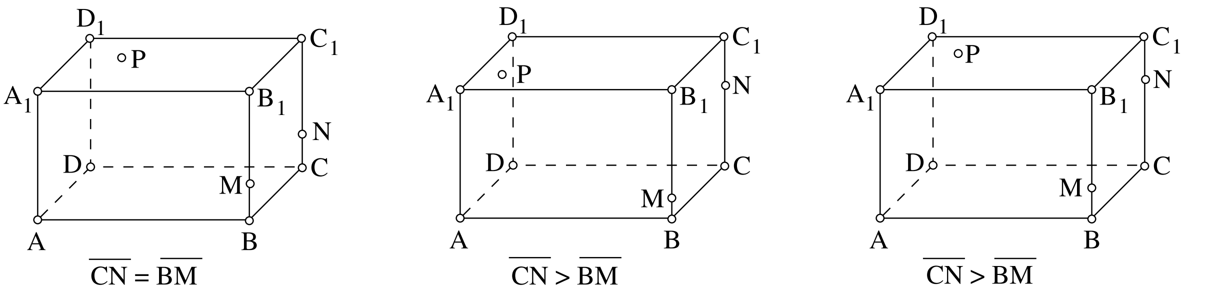
a) Beweisen Sie, daß für jede natürliche, im 4adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!

b) Beweisen Sie, daß man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

Aufgabe 171043B:

Auf untenstehenden Abbildungen ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt. Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechtecksfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.

Konstruieren Sie (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ε durch M, N, P ergibt! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!



Aufgabe 171044:

Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehenden Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

Aufgabe 171045:

Beweisen Sie, daß der Term

$$\frac{\lg(5\sqrt{2}-7)}{\lg(3-2\sqrt{2})}$$

eine reelle Zahl definiert und daß diese rational ist!

Aufgabe 171046:

Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems!

$$\begin{gathered} x + xy + y = 2 + \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{gathered}$$