17. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1977/1978

Aufgaben

17. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 171241:

Sind f und g im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetige Funktionen, so seien $d_1(f,g)$ und $d_2(f,g)$ wie folgt definiert: $d_1(f,g) = \max|f(x) - g(x)|$, $d_2(f,g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie zwei Strecken auf den Geraden $x = -1$ bzw. $x = 1$ begrenzt wird. (Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefaßt.)

Es seien nun f_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ und h die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ durch $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(1-x)x^{k-1}$ und $h(x) = 1$ definierte Funktionen.

a) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

b) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Aufgabe 171242:

Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1, -1\}$ als Definitionsbereich durch

$$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1; \tag{1}$$
$$h(1) = -1, \quad h(-1) = 1 \tag{2}$$

definierten Funktionen. Ferner seien f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind. Für diese Funktionen gelten:

$$f_1(1) = -1, \qquad f_6(1) = f_7(1) = 1; \tag{3}$$
$$f_3(f_4(1)) = -1; \tag{4}$$
$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1. \tag{5}$$

Man beweise, daß in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

Aufgabe 171243:

a) Man gebe alle Möglichkeiten an, eine gegebene Dreiecksfläche D in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.

b) Man beweise: Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig.

Aufgabe 171244:

Definition: Es sei mit $d(X, Y)$ der Abstand zweier Punkte X, Y einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt *Durchmesser* von $\mathfrak{M}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus $\mathfrak{M}$ gilt $d(X, Y) \leq d$.

(2) Es gibt Punkte P, Q aus $\mathfrak{M}$, für die $d(P, Q) = d$ ist.

Man beweise:

a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ε_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebenen Schnittfläche ε_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

Aufgabe 171245:

Es seien f_1, f_2, ... eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}, \qquad f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)} \quad \text{für} \quad \text{k} = 1, 2, 3, ...$$

Man ermittle für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ alle reellen Zahlen x, die Lösungen der Gleichung $f_n(x) = 2x$ sind.

Aufgabe 171246A:

Es sei n eine positive Zahl, $(a_1, ..., a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.

Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, ..., a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, daß die Zahl

$$z = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$$

möglichst klein ist.

Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den dazugehörigen minimalen Wert von z an.

Aufgabe 171246B:

a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen $2n$-Ecks $A_0A_1...A_{2n-1}$. Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses $2n$-Ecks heiße *einseitig*, wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Eckpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken *einseitig* ist.

b) Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ falls er existiert.

Hinweis: Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus drei Ecken A_i, A_j, A_k des $2n$-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller *einseitigen* unter ihnen, so ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als $w_n = \frac{g_n}{m_n}$.