18. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1978/1979

Aufgaben

18. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180931:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$.

Aufgabe 180932:

In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist:

"Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist."

Aufgabe 180933:

Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei. Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt. Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.

Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

Aufgabe 180934:

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis $1 : 3$.

Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Aufgabe 180935:

Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 läßt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

Aufgabe 180936:

Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_2 im Innern dieses Dreiecks.

Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe ΔABC das Bilddreieck $A_1B_1C_1$.
Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe ΔABC das Bilddreieck $A_2B_2C_2$.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2.

Man beweise, daß F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann.

Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.