18. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1978/1979

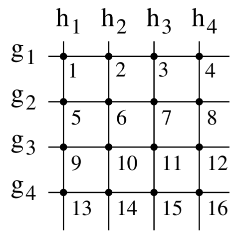
Aufgaben

18. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 181011:

Die Abbildung zeigt vier zueinander parallele Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, bei denen eine einheitliche Länge a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ als Abstand zwischen g_i und g_{i+1} auftritt, und weitere vier zu den g_i senkrechte Geraden h_1, h_2, h_3, h_4, bei denen a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ auch der Abstand zwischen h_i und h_{i+1} ist.



Ferner zeigt die Abbildung eine Numerierung der entstehenden Schnittpunkte.

a) Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Quadrate, die nur numerierte Punkte als Ecken und nur auf Geraden g_i oder h_i liegende Strecken als Seiten besitzen.

b) Man untersuche, ob es möglich ist, alle 16 numerierten Punkte so unter Verwendung der Farben Rot, Blau, Grün, Gelb zu färben (jeden numerierten Punkt mit genau einer dieser Farben), daß für die Ecken jedes in a) genannten Quadrates alle vier Farben auftreten!

Aufgabe 181012:

In einem Mathematikzirkel werden Aussagen zur Diskussion gestellt, die mit den Worten beginnen: "Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt, dann ..."

Antje stellt als Fortsetzung zur Diskussion: " ... ist a negativ."

Bernd stellt als Fortsetzung zur Diskussion: "... sind a und b negativ."

Cornelia stellt als Fortsetzung zur Diskussion: "... ist b negativ."

Doris stellt als Fortsetzung zur Diskussion: "... braucht weder a noch b negativ zu sein."

Man untersuche für jede dieser vier zur Diskussion gestellten Aussagen, ob sie wahr ist!

Aufgabe 181013:

Klaus erfindet für Schüler der ersten Klasse folgendes Spiel:

Auf 30 Kärtchen sind die Zahlen von 1 bis 10 so aufgeschrieben, daß auf jedem Kärtchen genau eine Zahl steht und daß jede der Zahlen 1 bis 10 dabei genau dreimal vorkommt. Eine ausreichende Anzahl unbeschriebener Kärtchen wird in Reserve gehalten.

Die 30 beschriebenen Kärtchen werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Der erste Spieler zieht zwei davon. Tragen beide die gleiche Zahl, so hat er ein "Paar" und darf es aus dem Spiel herausnehmen und behalten. Sind die beiden Zahlen voneinander verschieden, so werden diese beiden Karten ebenfalls aus dem Spiel herausgenommen; dafür wird auf eine der Reservekarten die (positive) Differenz der beiden Karten geschrieben und diese Reservekarte unter die übrigen noch im Spiel befindlichen gemischt.

Dann verfährt der zweite und anschließend jeder weitere Spieler ebenso, solange sich noch mindestens 2 Kärtchen im Spiel befinden. Ist jedoch (nach dem Herausnehmen eines "Paares" oder nach dem Hinzufügen einer Reservekarte) die Anzahl der im Spiel befindlichen Kärtchen kleiner als 2, so ist das Spiel beendet. (Der Spieler, der dann die meisten "Paare" besitzt, hat gewonnen.)

Beweisen Sie, daß das Spiel stets damit enden muß, daß sich noch genau eine Karte im Spiel befindet!

Aufgabe 181014:

Da sei ein Dreieck ABC
mit rechtem Winkel ACB.
Der Inkreisradius sei ρ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muß sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)