18. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1978/1979

Aufgaben

18. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 181031:
Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) \cdot f(x)$$

erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.

Aufgabe 181032:
Beweisen Sie:

Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind!

Aufgabe 181033:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a^2-5a+6} + \frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{1}{a^2-9a+20} + \frac{1}{a^2-11a+30} + \frac{1}{a^2-13a+42} = \frac{a \cdot (a+5)}{a^2-8a+7}$$

stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt!

Aufgabe 181034:
Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen Sie folgende Aussagen:

(1) Achim hat nicht den Ball oder Bernd hat den Ring.

(2) Bernd hat den Ring nicht oder Dirk hat den Würfel.

(3) Dirk hat den Würfel und Achim hat den Ball.

(4) Achim hat den Ball und Bernd hat den Ring nicht.

Ist es möglich, daß a) alle vier Aussagen b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind?

Aufgabe 181035:
Man untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d mit folgender Eigenschaft gibt:

Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definierte Funktion ist, so gilt $f(0) = 10$; $f(1) = 12$; $f(2) = 4$ und $f(3) = 1$.

Gibt es solche Zahlen a, b, c, d, so ermittle man alle derartigen Zahlen!

Aufgabe 181036:

Gegeben seien drei Punkte M, S und C, wobei $\overline{CM} = 6$ cm, $\overline{CS} = 7$ cm und $\overline{MS} = 1,5$ cm gelte.

Man konstruiere zwei Punkte A und B so, daß sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.

Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!