18. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1978/1979

Aufgaben

18. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

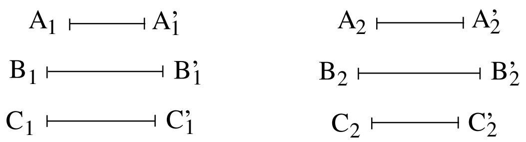
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 181041:

Wie lauten die letzten beiden Ziffern (bei üblicher dekadischer Ziffernschreibweise) derjenigen Zahl x, die die Gleichung $\log_{13}[\log_{12}(\log_{11} x)] = 1$ erfüllt?

Aufgabe 181042:

In einer Ebene ε seien durch ihre paarweise verschiedenen Endpunkte 6 Strecken A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' gegeben:



Mit V_1 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_1 = \overline{A_1A_1'}$, $b_1 = \overline{B_1B_1'}$, $c_1 = \overline{C_1C_1'}$ hat; mit V_2 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_2 = \overline{A_2A_2'}$, $b_2 = \overline{B_2B_2'}$, $c_2 = \overline{C_2C_2'}$ hat.

a) Beschreiben Sie eine in ε durchzuführende Konstruktion zweier Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 mit folgender Eigenschaft (1)!

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Falls} & \overline{P_1Q_1} < \overline{P_2Q_2} & \text{ist, gilt} & V_1 < V_2\,; \\ \text{falls} & \overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2} & \text{ist, gilt} & V_1 = V_2\,; \\ \text{falls} & \overline{P_1Q_1} > \overline{P_2Q_2} & \text{ist, gilt} & V_1 > V_2 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Daß P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (*) haben, wenn sie nach der Beschreibung konstruiert wurden, ist zu beweisen.

b) Untersuchen Sie für die Strecken $A_1A_1', ..., C_2C_2'$ auf der Abbildung auf die in a) genannte Weise, ob $V_1 < V_2$, $V_1 = V_2$ oder $V_1 > V_2$ gilt!

Aufgabe 181043A:

Es sei a eine positive, von 1 verschiedene reelle Zahl. Ferner sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

definierte Funktion.

Man beweise, daß f eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion g als Umkehrfunktion besitzt, und ermittle diese Funktion g!

Aufgabe 181043B:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die erstens jede in dem Ausdruck

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

auftretende Wurzel und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist!

Aufgabe 181044:

Man beweise: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, dann gilt

a) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ und

b) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$!

Aufgabe 181045:

Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen $(n; z)$, für die $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$ gilt!

Aufgabe 181046:

Verbindet man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a die Mittelpunkte je zweier benachbarter Seitenflächen miteinander, so bilden die sämtlichen entstehenden Verbindungsstrecken die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Sein Volumen sei mit V bezeichnet.

Beweisen Sie, daß auch ein regelmäßiges Oktaeder existiert, dessen Ecken auf der Oberfläche des gleichen Würfels liegen und dessen Volumen mehr als $3V$ beträgt!